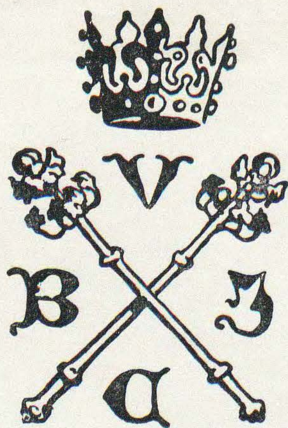

BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVIENSIS


V
B
J
C

Mathesis Crosz. 4°

Crüger Petri: Tetragonismus circuli per lineas.

TETRAGONISMUS

CIRCULI

per lineas:

Quem

NICOLAUS RAIMARUS

FUNDAMENTO SUO ASTRONOMICO

transcursim inseruit,

EXPEDITIORI STRUCTURA

ET EVIDENTIORI DEMONSTRATIONE

Productus

à

M. PETRO CRÜGERO

BORUSSO.



LIPSIÆ

MICHAEL LANTZENBERGER

EXCUDEBAT.

ANNO M. DC. VII.

Contra hunc Tetragonismum scripsit

Adrianus Romanus.





Magnificis & Amplissimis

DOMINIS

COSS. & SENATVI

FLORENTISS. REIPVB.

DANTISCANAE:

Dominis & Patronis

etiam atq; etiam honorandis.



Obis, augusti Proceres, hos meos consecrare labores & debui & volui. Debui; quia pro benevolo, quem in Rep. vestra publicè privatimq́; expertus sum, affectu dudum gratæ mentis vestigium exhibere debui. Volui etiam, quia volentem volentia vestra fecit, & scripti materies. Notum mihi singulorum in mea studia studium: notus universorum in Geometriam amor; quem (audacter loquor, quia verè) præ

rè) præ cæteris omnibus istius oræ civitatibus impensè fovetis. Et eo quidem nomine, utrum Vobis potius an Mathematicæ gratuler, incertus sum. Id certò constat, & doctrinam hanc tantis cultoribus, & cultores hos tantâ doctrinâ dignissimos. Quæ ut satis illustria sunt, ita meis frugum Geometricarum primitiis alios meditari patronos dissuadet loci vestri Genius. Quocirca paucas has pagellas eò, quo in præsentem eratis, animo suscipite; meiq́ue, si quod est, ingenii fœtum primogenitum vestro, Viri magni, gremio fovete, ac studiis meis, quod facitis, favete. Sic ÆOLUS OPT. MAX. vela Reip. vestræ feliciter dirigat, perq́ue boreales Aquilonis & Euri tempestates incolumi cursu traducat. Ex Academia Lipsiensi, prid. Cal. Martias, Anni 1607.

VV. Magn. & Ampl.

addictiss.

M. Petrus Crügerus.

DE QVA-



DE QVADRATVRA CIRCVLI.

Rgumentum aggredior inter Mathematica difficillima non postremum, & omnium jam inde ab ævo prisco nobilium ingeniorum perpetuum exercitium. Itaq; morum temporumque gnarus, me variis variorum judiciis expositum iri, non sum nescius. Quæ tamen tantum abest ut formidem, ut ultrò etiam ea subeam. Non enim gloriabundus in publicum prodeo, sed impulsus causa, quam paulò pòst aperiam. Scio nonnullis Circuli quadrationem multis de causis ἔργον ἀδύνατον haberi, quarum quæ præcipua est, omninò falsam esse constat vel leviter saltem Geometricis elementis imbuto. Cur enim, si recti nulla sit ad curvum ratio, *Circuli sunt ut à diametris quadrata; diametri ut peripheriæ?* quarum invicem proportionem etiam permutatam, quamvis numero non explicabilem, astruit Geometria. Quin & paraboles tetragonismum ab Archimede traditum ac demonstratum omnes hactenus adprobarunt: eundem ergo cur Circulo derogant, figuræ multò reguláriori? Quibus aliisq; rationibus moti non pauci quadraturam circuli non omnino quidem impossibilem statuerunt, sed tamen, cum eam à plerisq; viderent vel frustrà tentatam vel non satis demonstratam, de ejus inventione spem omnem abjecerunt. Verùm *malè de naturâ censet*, inquit Lud. Vives lib. 1. de causis corrupt. art. *quicunq; uno illam alterove partu effœtam esse arbitratur: cur se non putent aliquid excussuros, si annitantur?* Et certè hoc seculo, ingeniorum doctrinæq;, si quod unquam, fertilissimo, quid non speremus? Ego multa latere in omnibus fermè disciplinis arbitror, quorum inventionem sæpe non difficilem posteri mirentur nobis neglectam.

Cæterùm quum præ aliis illi potissimum quadrandi Circuli modo, quem à Simone quodam de Quercu primitùs inventum Nicolaus Raimarus Fundamento suo Astronomico inseruit, firmam subesse demonstrationis vim animadverterem, & ta-

men cùm ipſam fabricam ſcrupuloſâ difficultate, tùm demonſtrationem aliquâ obſcuritate, laborare cernerem: rem poſthac intentiùs indigitare cœpi, & principio fabricam expeditiorem, inde demonſtrationem etiam in adſcripto XCVI laterum polygono procedere deprehendi. Tandem ratio, dato quadrato æqualem Circulum deſcribendi, quam Raimarus ne verbo quidem attigit, me diu quidem ſollicitum habuit. Erui tamen & eam: atq; ita Quadraturam integram, non ſine viri magni ſuaſu, (quod bene vertat) luci committo publicæ. Neq; enim candidas eruditorum cenſuras ſubterfugere mens eſt. Quin hoc mei quicquid eſt laboris apud Viros Mathematicos non improbatum iri confido.

Quæ cum ita paucis in veſtibulo præfatus ſim, ad rem ipſam protinus ingrediemur, eo gradu, ut primò neceſſaria tum ad conſtructionem, tum ad demonſtrationem videamus theoremata & problemata; non quidem omnia ea, quæ Raimarus adhibuit (eorum enim vix duobus retentis reliqua tanquam ſupervacanea rejecimus;) ſed ab iis longè diverſa, quorum nonnulla jam ab Euclide atq; aliis abundè demonſtrata ſunt, nonnulla nobis per ea ipſa tanquam principia demonſtrabuntur. Quibus omnibus, ut validis fundamentis, ipſum tandem tetragoniſmum ſuperſtruemus.



PROBL.

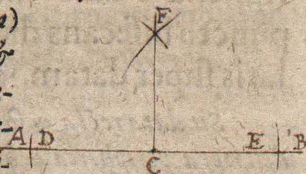


PROBL. I. PROPOS. I.

Datâ rectâ lineâ, à quovis in ea dato puncto perpendicularem erigere.

E medio vel circa medium: Si è dato datæ rectæ puncto duæ partes utrinq; secentur æquales, & à sectionum punctis duæ æquales peripheriæ concurrant; recta à dato puncto in concursum peripheriarum, erit perpendicularis super datam. 9. e. V. R.

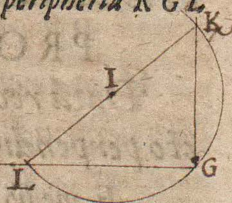
Sit data recta A B, & punctum in eâ datum C, è quo erigenda perpendicularis. E dato puncto C abscindantur à data A B (per post. 2. si opus sit, continuata) portiones utrinq; æquales C D, C E; & à punctis abscißionum D & E duæ æquales peripheriæ describantur, concurrentes in F. Ducta recta C F perpendicularis erit super datam, per 11. p. I. Eucl. Eodem modo data recta bisecatur: nam si duæ æquales peripheriæ à terminis datæ rectæ utrinq; concurrant, recta per puncta concursus bisecabit datam rectam, per 10. I. Eucl.



Ab extremitatibus: Si è centro extra datam ubivis assumto peripheria, datam in alio præter datum terminum puncto intersecans, describatur, & ex intersectionis puncto diameter ducatur; recta ex altero diametri termino in datum demissa, erit perpendicularis datæ.

Sit data

Sit data G H, à cujus extremitate G erigenda perpendicularis. Centro I, intervallo I G, describatur peripheria K G L, per punctum datum G & aliud in data L: ex puncto deinde L diameter peripheriæ ducatur L I K; quo facto recta è G ad K excitata erit perpendicularis datæ G H. Clavius ad 11. I. E.

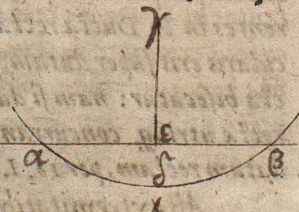


PROBL. II. PROP. II.

In datam rectam à quovis extra eam dato puncto perpendicularem demittere.

Circa medium: Si pars datæ rectæ secetur à peripheria è dato extra eam puncto: recta à dicto puncto bisecans dictam partem, erit perpendicularis super datam. 10. e. V. R.

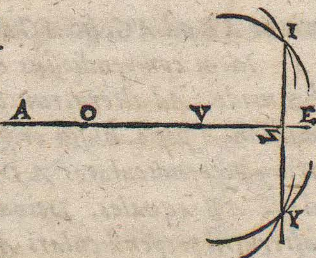
Sit data recta α β, & punctum extra datum γ: è quo descripta peripheria α δ β, abscindat è data portionem α β: quæ per 1. hujus bisecetur in ε. E puncto dato γ in punctum bisectionis ε demissa recta perpendicularis erit super datam, per 12. I. E.



Circa extremitates: Si è diversis in data centris per datum punctum peripheriæ infra & supra datam describantur; recta per concursum peripheriarum, perpendicularis erit super datam.

Sit

Sit data A E, punctum datum I: assumtis in data centris O & V describantur duæ peripheriæ sese intersecantes supra datam in puncto dato I, infra in Y. Recta igitur I Y, vel I Z, perpendicularis est super datam A E. Clav. ad 12. I. E.

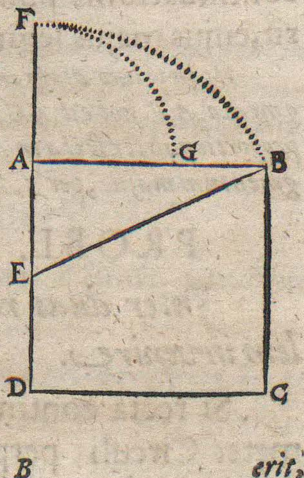


PROBL. III. PROP. III.

Datam rectam proportionaliter sive extrema ac media ratione secare.

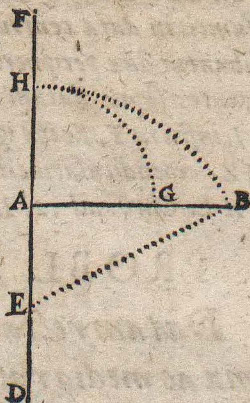
Si quadratum fiat è data recta; rectæ ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia supra dimidium erit majus segmentum datæ proportionaliter sectæ. R. 3. XIIII.

Proportionaliter datam secare est ita eam secare, ut se habeant sicut tota ad segmentum majus, ita segmentum majus ad minus. Sit data A B proportionaliter secanda. Fiat Quadratum A B C D, & ab angulo Quadrati B ad E medium contermini lateris ducatur recta B E; quæ comparetur dimidio E A, & apparebit differentia A F. Ea ipsa differentia translata in datam erit majus segmentum proportionaliter sectæ, per 11. II. & 30. V I. Eucl. hoc est,



erit ut A B ad A G, ſic A G ad G B.

Idem compendioſiùs effici licet hoc modo: Ad alterutrum datæ terminum A per 1. hujus erigantur utrinq; perpendiculares A D, A F, ipſi datæ A B æquales. Deinde biſectâ alterutrâ perpendiculari A D in E, capiatur intervallum ſubtenſæ E B, & centro E transferatur in alteram perpendicularem A F, quæ eo ipſo ſecabitur proportionaliter in puncto H: & ſegmentum A H æquale erit ſegmento datæ A G, ut & ſegmentum H F ſegmento G B.



Hinc

Si recta proportionaliter ſecta majore ſui ſegmento continuetur; recta ſic continuata, in ipſo continuationis puncto proportionaliter ſecta erit, cujus majus ſegmentum erit data.

Ut in primo diagrammate A D, hoc eſt A B, majori ſegmento A F, hoc eſt A G, continuata, ut fiat tota D F, erit ipſa proportionaliter ſecta in A, & data A D (hoc eſt A B) erit ſegmentum majus, per 5. XIII. Eucl.

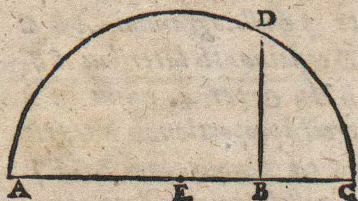
PROBL. IV. PROP. IV.

Inter duas rectas mediam proportionalem invenire.

Si recta continuata è duabus datis fiat diameter Circuli; perpendicularis à puncto continuatio-

nuationis in peripheriam erit proportionalis inter datas. Finck. 7. IV.

Sint duæ datæ AB, BC, ita continuatæ, ut sint diameter Circuli ex E describendi. Descripto itaq; Circulo ADC, è puncto continuationis B per 1. hujus in peripheriam perpendicularis erigatur BD: quæ per 13. VI. Eucl. proportionalis erit inter datas AB & BC. Hoc est, erit ut AB, ad BD, sic BD ad BC.



THEOR. I. PROP. V.

Si tres rectæ sint proportionales; quadratum mediæ æquatur oblongo extremarum: & contrà *Euclid. 17. VI.*

Quia nempe media bis ponitur; ita ut vigorem duarum obtineat: rectangulum autem sub mediis inter 4. proportionales comprehensum per 16. VI. E. æquale est comprehenso sub extremis. Hinc promanat sequens problema.

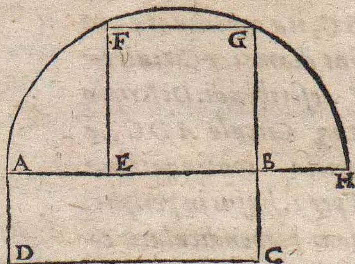
PROBL. V. PROP. VI.

Dato parallelogrammo æquale quadratum constituere.

Si parallelogr. duo latera contermina fiant diameter, & è puncto continuationis in periphe-

riam perpendicularis excitetur; erit ea latus Quadrati parallelogrammo æqualis.

Vt in præsenti schemate parallelogrammi A B C D continuatis lateribus A B, B H, & per 4. hujus ex B erectâ proportionali B G, erit ex eâ Quadratum B G F E parallelogrammo dato æquale per proximè præced.



PROBL. VI. PROP. VII.

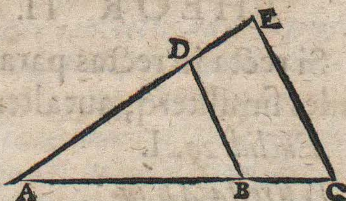
Tribus datis rectis quartam proportionalem invenire.

Si trium datarum duæ priores secundum rectam continuatæ cum tertia angulo quocunque connectantur, & reliqui primæ tertiæq; termini rectâ jungantur, eiq; à secundæ termino parallela ducatur; segmentum tertiæ continuatæ inter parallelas interceptum erit ad tertiam, ut prima ad secundam.

Sint tres datæ A B, B C, A D, quibus invenienda quarta proportionalis. Disponantur A B, B C secundum rectam lineam A C: cui tertia A D connectatur angulo A quocunq;. Jungantur D & B rectâ D B, cui ex C agatur parallela C E.

Continua-

Continuatâ A D in E erit D E quarta proportionalis quæsita, hoc est, erit ut A B ad B C, sic A D ad D E, per 12. VI. Eucl.

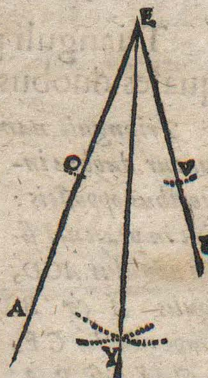


PROBL. VII. PROP. VIII.

Datum angulum planum vel arcum Circuli bisecare.

Si duæ æquales peripheriæ à terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei antè concurrant, recta à concursu ad verticem bisecabit angulum datum. R. 6. V.

Esto angulus A E I bisecandus. Centro E abscindantur æquales crurum portiones (nam hæ loco æqualium crurum habentur) & à punctis æquationum O & V duæ è regione anguli describantur æquales peripheriæ concurrentes in Y. Ducta recta à concursu peripheriarum in angulum bisecabit eundem per 9. I. E.

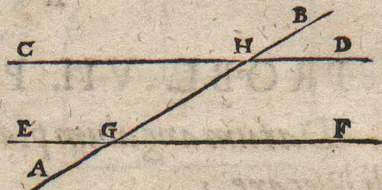


In bisecandis arcubus Circuli, crurum æquatione non est opus, cum per 15. d. I. E. angulorum ad centrum constitutorum Crura sint æqualia.

THEOR. II. PROP. IX.

Si recta in rectas parallelas incidat, angulos similes similiterq; aut alternatim sitos facit æquales. *Euclid. 29. I.*

Vt si recta A B incidat in parallelas C D, E F; angulos similes similiterq; sitos B H D & B G F, item alternatim sitos C H G & H G F, æquales facit &c. Ratio est evidens. Nam si

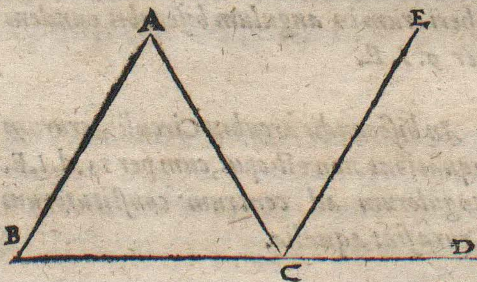


A B recta est, rectæ C D & E F æqualiter inter se distare non possunt, nisi ad rectam A B æqualibus angulis inclinentur. Pitiscus 38. p. I.

THEOR. III. PROP. X.

Trianguli plani tres anguli simul sumti sunt æquales duobus rectis. 32. I. *Euclid.*

Trianguli namq; uno latere producto angulus exterior æquatur duobus interioribus oppositis: velut in præsenti figura angulus ACD, angulis A & B. Nempe ductâ C E, parallelâ ipsi B A, per 9. hujus erunt anguli alterni ACE



& A, æqua-

& A, æquales; itidemq; similiter siti E C D, & B. Iam quoniam per 13. I. Eucl. anguli super ead. recta ad idem punctum concurrentes sint æquales duobus rectis, & angulus exterior A C D (ex duobus, A C E, & E C D, compositus) duobus interioribus A & B, sit æqualis; addito communi A C B, erunt duo A C D & A C B, duobus rectis æquales. At iidem etiam sunt æquales tribus interioribus: Ergo & interiores duobus rectis erunt æquales. Hinc

1. Datis angulis quibuscunq; duobus datur tertius.

Est enim duorum datorum ad duos rectos complementum; ut si in proposito schemate angulus B sit 53, A 65; summa 118 subtracta duobus rectis relinquit tertium A C B 62. Et

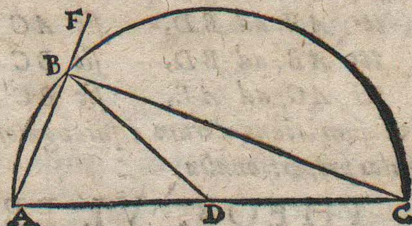
2. In triangulis rectangulis acutorum alter est alterius complementum.

Vterq; enim conjunctim constituunt rectum alterum.

THEOR. IV. PROP. XI.

Angulus in semicirculo rectus est. 31. III. *Eucl.*

Ut angulus A B C. Ducto enim radio B D, & protensa AB in F; quoniam rectæ D A, D B, æquales sunt, erunt, per 5. I. Eucl. anguli A B D, B A D, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli D B C, B C D: ideoq; totus



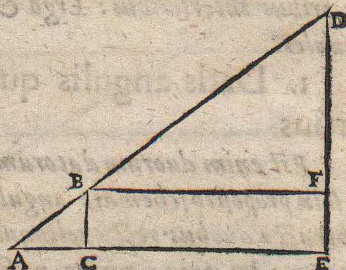
A B C duobus B A C, B C A æqualis erit. Est autem & externus F B C per 10. hujus, duobus istis æqualis. Atq; ita anguli deinceps F B C, A B C, sunt æquales: Ergo recti.

THEOR.

THEOR. V. PROP. XII.

Triangula æquiangula ſeu ſimilia habent latera circum æquales angulos proportionalia, & contrà. 4. VI. *Eucl.*

Quia ſc. anguli BAC & DAE, itemq; ADE & ABC ex theſi ſunt æquales: Ideo ſi AB ad AD ita applicetur ut AC in AE cadat, reliqua latera BC & DE neceſſariò erunt parallelæ per 9. hujus. Atq; ita in triangulo ADE recta BC parallela baſi DE per 2. VI. Eucl. crura AD & AE ſecat proportionaliter, ut ſit velut AD ad AB, ſic AE ad AC. Ducta porrò per B recta BF parallela baſi AE, ſecabit eadem crus reliquum DE proportionaliter in F, ut ſit velut AD ad AB, ſic ED ad EF: velut AB ad BD, ſic EF ſive CB ad ED. Atq; ita, cum EF & CB æquantur, erit etiam



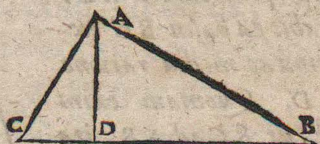
Ut AB ad BD, ſic AC ad CE, &
Ut AB ad BD, ſic BC ad DE, &
Ut AC ad AE, ſic BC ad DE. Erunt itaq; in univerſum triangulorum æquiangulorum latera circa æquales angulos proportionalia.

THEOR. VI. PROP. XIII.

In triangulo rectangulo perpendicularis ex angulo recto in baſin facit triangula ſimilia inter ſe & toti. 8. VI. *Eucl.*

Ut in

ut in triangulo ACB perpendicularis AD ex angulo recto A in basin CB demissa facit duo triangula ACD, ADB similia inter se,

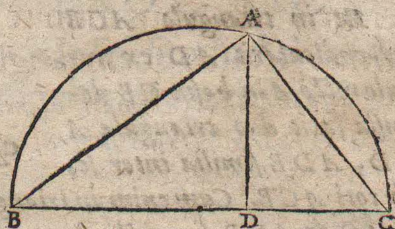


& toti ACB. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC & ADB, sint recti, & angulus B communis, erunt & reliqui ACB & DAB per 10. hujus æquales. Igitur triangula DBA, ABC erunt æquiangula, ac proinde per 12. hujus habebunt latera circum æquales angulos proportionalia, hoc est, erit ut CB ad BA, sic BA ad BD; & ut BA ad AC, ita BD ad DA; & ut BC ad CA, sic BA ad AD. Atq; ita triangulum ADB simile est toti ABC. Eodem modo demonstratur reliquum triangulum ADC simile esse toti ACB. Nam anguli BAC, & ADC, recti sunt, & angulus C. communis; ac proinde reliqui, ABC, CAD, etiam erunt æquales. Quare & æquiangula erunt, atq; ita ADC simile toti ACB. Tandem hinc convincitur triangula CAD & ADB quoq; similia esse: nam anguli ADC, ADB, recti sunt; & angulos ABD, & CAD, etiam æquales esse modò ostensum est, ut & angulos DAB & ACD. Quare hæc duo triangula sunt inter se & toti similia.

THEOR. VII. PROP. XIV.

Si trianguli rectanguli tria latera sunt continuè proportionalia; perpendicularis ex angulo recto demissa secat basim extrema & media ratione: & contrà. *Clav. sch. XIII. ad 33. p. VI. Eucl.*

In triangulo rectangulo ABC tria latera sint continuè proportionalia. Si ergo ex angulo A per 11. hujus recto demittatur



tur perpendicularis A D, *secabit ea basin* B C *extremâ ac media ratione in* D. *Quoniam enim est, ut* B C *ad* A B, *ita* A B *ad* A C; *est autem ut* B C *ad* A B, *ita* A B *ad* B D, *quod* A B *media proportionalis sit inter* B C *&* B D *per coroll. 8. p. VII. Eucl. erit per 11. quinti ut* A B *ad* A C, *ita* A B *ad* B D; *ac proinde per 9. V. æquales erunt* A C *&* B D. *Ut igitur* A C *ad* C D, *ita per 7. V.* B D *ad* C D. *sed ut* A C *ad* C D, *ita* B C *ad* A C, *quod per Coroll. 8. p. VI. E.* A C *sit media proportionalis inter* B C *&* C D. *Igitur per 7. quinti erit etiam* B C *ad* A C *h. e. ad* B D, *ut* A C *h. e.* B D *ad* C D. *Ac propterea* B C, *in* D, *secta erit extrema ac media ratione. Itaq; (inquit Clavius d. l.) si super datam rectam* B C *construendum sit triangulum rectangulum, cujus latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta* B C *extrema ac media ratione in* D. *Descripto deinde semicirculo* B A C *circa eandem datam* B C, *erigenda erit ad* B C *perpendicularis* D A, *jungendaq; rectæ* B A, C A. *Triangulum enim* A B C *propter angulum* A *in semicirculo rectum, erit rectangulum; ac proinde cum perpendicularis* A D *secet basin extrema ac media ratione; tria latera continuè erunt proportionalia. Quæ deinceps duo sequuntur theoremata cum suis consectariis, Raimari sunt: quæ propterea ferè verbotenus huc transferemus, diagrammatis tamen aliis adhibitis.*

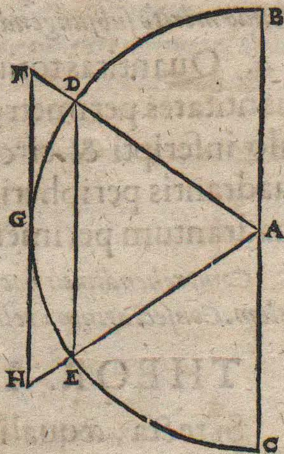
THEOR. IIX. PROP. XV.

Linea recta arcui peripheriæ subtensa, ipso

cui

cui ſubtenditur, arcu minor eſt: arcum autem tangens & inter peripheriæ, cujus eſt arcus, radios per terminos arcus infinitè continuatos comprehenſa, ipſo arcu quem tangit, major eſt.

Eſt primum Raimari Elementum: intellectu facile. *Recta* D E *arcui* D G E *ſubtenſa ipſo arcu minor eſt per c. 5. e. II. R. perq; 2. p. III. Eucl. Recta verò* F H *tangens arcum* D G E *in* G, *& comprehenſa inter radios* A D, A E *per terminos arcus* D *&* E *continuatos in* F *&* H, *ipſo arcu* D G E *major eſt. Triangulum enim* A F H *majus eſt comprehenſo inter ſe ſectore* A D G E *per ἐφάρμωσιν. At horum utriusq; altitudo* A G *æqualis eſt: Ergo reliqua dimenſio nempe baſis* F H *trianguli* A F H, *major erit ſectoris baſi* D G E. Hinc conſectaria:



1. Cujuslibet arcus quantitas verſatur inter quantitatem ſubtenſæ, & inter quantitatem tangentis, inter radios circuli, cujus eſt arcus, per terminos arcus infinitè continuatos comprehenſæ.

2. Tota perimeter polygoni ordinati circulo inſcr[illegible] minor eſt ipsâ circuli peripheriâ: tota verò perimeter polygoni ordinati circumſcripti peripheriâ Circuli major eſt; & contrà.

3. Quadrans perimetri cujuſcunq; polygoni ordinati circulo inſcripti minor eſt quadrante peripheriæ ejuſdem Circuli: quadrans autem perimetri polygoni circumſcripti major eſt quadrante peripheriæ ejuſdem.

Sextum hoc eſt conſectarium elementi primi Raimariani, ſecundo meritò ſubjungendum.

4. Quantitas totius peripheriæ Circuli eſt inter quantitates perimetrorum polygoni ordinati Circulo inſcripti & circumſcripti: Conſequenter & quadrantis peripheriæ quantitas inter quantitates quadrantum perimetrorum eorundem.

Comprehendimus hoc uno Raimari quartum & quintum 1. elem. Conſectarium: reliquis, puta tertio & ſeptimo, omiſſis.

THEOR. IX. PROP. XVI.

Si recta, æqualis quadranti perimetri cujuſcunq; multanguli ordinati circumſcripti, circulo ab alterutro diametri termino inſcribatur, & extra circulum in tangentem, ad alterum diametri terminum perpendiculariter verſus idem latus infinitè eductam, continuetur; abſcindet continuata â dicta tangente ſegmentum inter diametri terminum & abſciſsionis punctum inſcriptâ majus: æqualis autē quadranti perimetri multanguli (ad alterum homologi) inſcripti eodem modo conti-

continuata, abſcindet à dicta tangente ſegmentum inſcriptâ minus.

Quintum hoc eſt & ultimum Raimari elementum. Eſto circulus A B C D, *cujus diameter* A C, *tangens per 16. III. Eucl. ad diametri terminum* C *infinita* C E. *Recta æqualis quadranti perimetri inſcripti duodecanguli* A B, *per continuationem à tangente* C E *abſcindens ſegmentum* C F, *multò majus inſcriptâ* A B. *Contra verò recta* A G *æqualis quadranti perimetri duodecanguli circumſcripti, per continuationem à dicta tangente abſcindit ſegmentum* C H, *minus inſcriptâ* A G.

Ductis enim per inſcriptionum terminos G & B *rectis* C I, C K, *diametro* A C *æqualibus, & à punctis* I & K *demiſſis in tangentem* C E *perpendiculis* I L, K M, *fient triangula ſimilia* A B C, C I L, *item* A G C, C K M: *ſiquidem trianguli* A B C *angulus ad* B *rectus eſt per 11. hujus; & trianguli* C I L *angulus ad* L *itidem rectus eſt per ſtructuram: deinde trianguli*

 ABC angu-

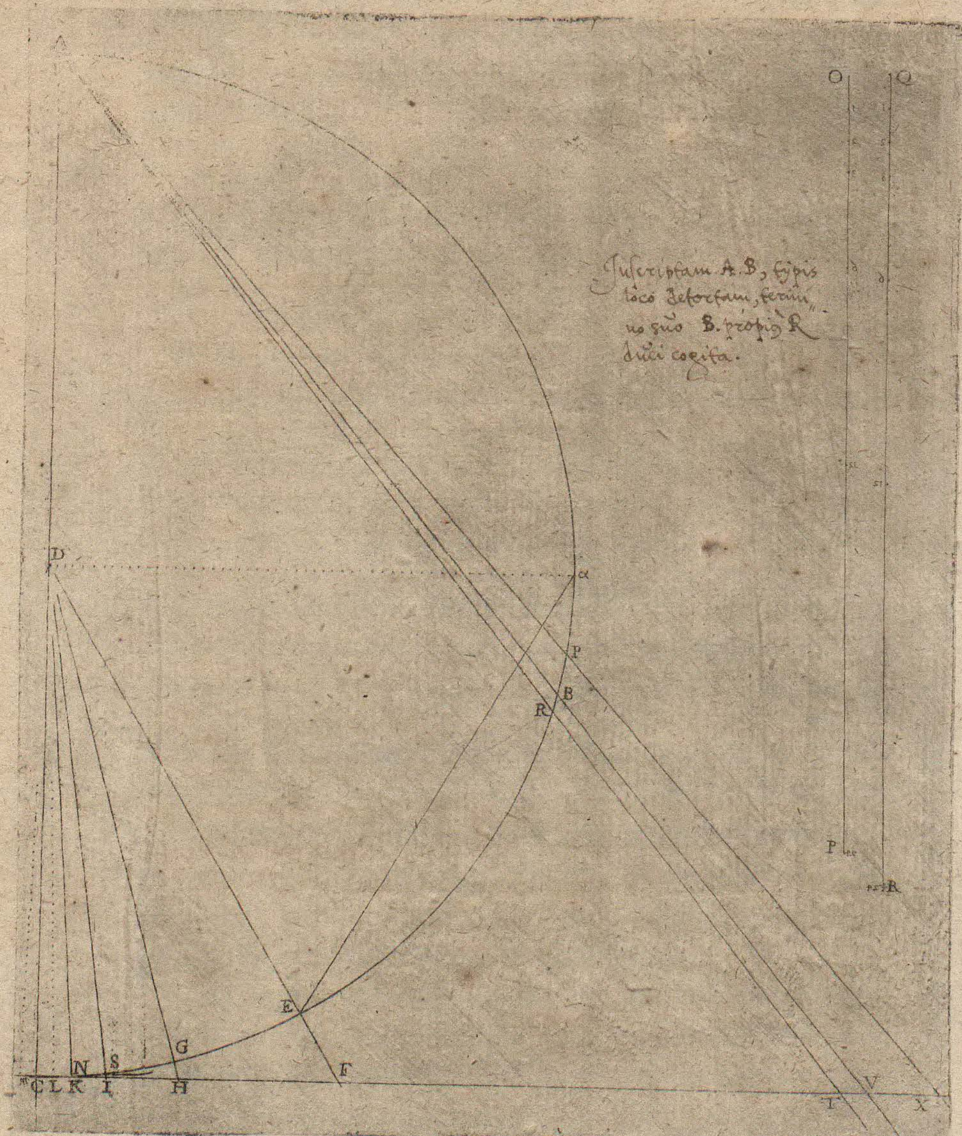
ABC angulus ad C propter parallelas A C, *IL, per 9. hujus æquatur angulo I trianguli C IL: ac proindeper 10. hujus triangulorum* A B C, *CIL, anguli ad* A *&* C *etiam æquales erunt. Ideoq; cum sint hæc duo triangula similia, erunt eorundem latera circum æquales angulos, per 12. hujus, proportionalia; hoc est, erunt ut* A C *ad* C B, *sic CI ad IL, & ut* A C *ad* A B, *sic CI ad CL &c. sed CI ex structura æquatur diametro* A C, *ergo IL æquatur ipsi CB: igitur & reliqua* A B. *CL latera æquantur. Atqui latere CL, hoc est, inscriptâ* A B, *multò majus est abscissum segmentum CF per 9. ax. Eucl. quod erat demonstrandum. Eodem modo trianguli* A *GC angulus ad G in semicirculo rectus est; rectus item per struct. angulus ad M in triangulo CKM: trianguli deinde* A *GC angulus ad C, propter parallelas* A *C, KM, per 9. hujus æquatur angulo K trianguli CKM: Ergo & reliqui ad A & C anguli triangulorum AGC, CKM, æquantur. Unde triangula constat esse similia, lateribusq; circum æquales angulos proportionalia. Sed CK æqualis est per structuram diametro* A C, *ergo & reliqua dictorum triangulorum latera ad invicem erunt in ratione æqualitatis, & ita CG æqualis est ipsi KM, & AG æqualis ipsi CM. Atqui CM, vel ipsi æqualis AG, major est abscisso segmento CH: quod erat propositum. Constat igitur utraq; pars theorematis.* Hinc itaq;

Si recta, æqualis quadranti peripheriæ Circuli, eidem Circulo ab alterutro diametri termino inscribatur; per continuationem abscindet à tangente segmentum æquale; & contra.

Manifestum hoc est ex præcedentibus. Cum enim quantitas quadrantis peripheriæ per 4. conf. 15. hujus versetur inter quantitates quadrantum perimetrorum adscripti polygoni; & verò

Tabl I

Ad pag. 17


A
O
Q
Inscriptam A.B, typis
loco detortam, termin-
no suo B. propius R
duci cogita.
D
α
P
B
R
P
R
E
G
N
S
C L K I H
F
T
V
X

verò iam modò demonstratum sit, rectam æqualem quadranti perimetri polygoni circumscripti, circulo inscriptam per continuationem abscindere segmentum à tangente minus; polygoni verò inscripti segmentum majus: necessariò quadranti peripheriæ circuli æqualis abscindet segmentum æquale. Et contrà: inscripta per continuationem abscindens segmentum sibimet æquale, erit æqualis quadranti peripheriæ.

Asscribamus Circulo Archimedea ratione multangulum laterum XCVI. hoc modo: Semicirculus ABC ex centro D descriptus dividatur in duos quadrantes Aa, aC, & termino a versus C inscribatur radius aE; pro latere sexanguli, $\frac{2}{3}$ anguli recti subtendente. Ducatur tangens per 16. III. Eucl. CF, & radius DE continuetur in F; erit angulus CDF $\frac{1}{3}$ recti, atque adeò arcus CE $\frac{1}{12}$ totius peripheriæ. Bisecetur angulus CDF; erit CDH $\frac{1}{6}$ recti, adeoque arcus CG $\frac{1}{24}$ peripheriæ. Quo rursum bisecto erit angulus CDI $\frac{1}{12}$ recti, atque arcus CS $\frac{1}{48}$ peripheriæ. Hoc etiam bisecto erit CDK $\frac{1}{24}$ recti, & arcus CN $\frac{1}{96}$ peripheriæ: Subtensa igitur CN latus inscripti polygoni XCVI. laterum. Tandem angulo CDK bisecto erit CDL. $\frac{1}{48}$ recti, atque adeò tangens CL latus circumscripti 192. laterum polygoni; cujus dupla LM latus polygoni circumscripti 96. laterum. Latus hoc vicies-quater sumtum quadrans est perimetri polygoni 96. laterum circumscripti; ut & CN toties repetitum, quadrans perimetri inscripti. Utrique æqualis recta, quasi QR, OP (seorsim positæ) Circulo, termino diametri alterutro A inscribatur; inscripti AP, circumscripti AR. Manifestum est, & per proximè præcedentia demonstrabile, segmentum tangentis (per post. 2. continuatæ) CX majus esse ipsa inscriptâ AP: & CT minus ipsa AR. Inquisita verò & inscripta AB, intra ipsas AP & AR, æqualis est abscisso segmento CV. Er-

CV. Ergo vel AB vel CV æqualis est quadranti peripheriæ Circuli, cujus diameter AC.

Atq; hic subsistit Quadratura Raimari. Sic enim habet elementum fabricæ:

Si recta, Circulo ab alterutro diametri termino inscripta, per peripheriam extrà in tangentem, ex altero diametri termino versus idem latus perpendiculariter erectam, continuetur, donec à dictâ tangente sibiipsi æquale segmentum absciderit; æquabitur ipsa inscripta, vel ei æquale abscissum segmentum, quadranti peripheriæ Circuli.

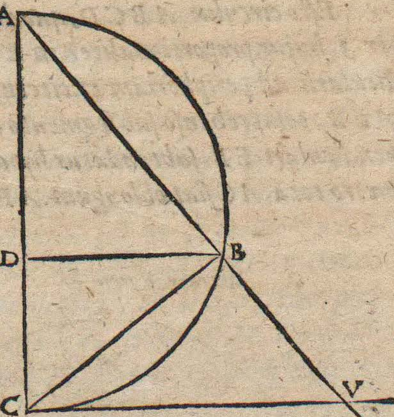
Sed cum hujus æqualitatis investigatio, præsertim in figuris minoribus, tum molesta nimis, tum errori facilè obnoxia sit; meritò desideratur expeditior & compendiosior, quam seq. propp. exhibemus.

THEOR. X. PROP. XVII.

Si recta æqualis quadranti peripheriæ, Circulo ab alterutro diametri termino inscribatur; perpendicularis ab altero inscriptionis termino in diametrum demissa secat eandem extrema ac media ratione.

In adjuncto diagrammate, dico à termino B inscriptæ AB (quadranti peripheriæ per c.20. hujus æqualis) demissam perpendicularem BD secare diametrum AC extrema ac media ratione in D.

Ductâ namq; CB, quoniam perpendicularis BD ex angulo ABC per 11. hujus recto, in basin AC decidit; facit duo triangula



triangula ABD, BDC, per 13. hujus similia inter se & toti ABC. Continuata præterea AB infinitè, ductâq; CV parallela ipsi DB, continuatæ occurrente in V, fiunt anguli alterni BCV, DBC (i.e. angulus CAB per 1.d.VI. E.) æquales: Et quoniam triangulorum ABC, BCV, anguli ad B recti sunt, erunt & reliqui, ACB, CVB, æquales: atq; ita triangulum ABC triangulo CBV erit æquiangulum, adeoq; erit ut CA ad AB, sic VC ad CB. Hinc patet, trianguli ABC tria latera esse continuè proportionalia: ac proinde perpendicularis DB diametrum AC, per 14. hujus, extrema ac media ratione secat in D. Nunc igitur expeditior evadit fabrica tetragonismi, ut sequitur.

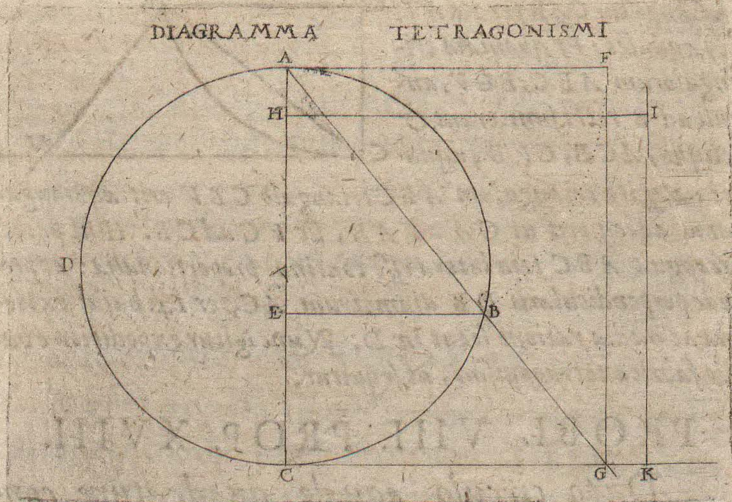
PROBL. VIII. PROP. XVIII.

Dato circulo æquale quadratum construere.

Si dati circuli diameter extrema ac media ratione secetur, & è sectionis puncto perpendicularis ad peripheriam erigatur: oblongum è diametro & hypotenusa, rectum perpendiculari & majori segmento inclusum subtendente, redactum in quadratum, erit æquale Circulo.

 Esto

Esto circulus ABCD, quadrandus. Secetur diameter AC, per 3. hujus, proportionaliter in E: & ex E, per 1. hujus, perpendicularis ad peripheriam excitetur EB. Recto deinde angulo AEB, comprehenso sub segmento diametri majore AE, & perpendiculari EB, subtendatur hypotenusa AB. Ex AB & diametro tota AC fiat oblongum AFGC, cui per 6. hujus constituatur æquale quadratum HIKC. Dico quadratum illud HIKC æquale esse Circulo ABCD. Quoniam enim per 15. & ejus consß. perq́ 16. & ejus cons. abundè demonstratum est, quadrantem peripheriæ versari intra quadrantes adscriptorum multangulorum regularium; & rectam AB, à tangente CK æquale sibi segmentum CK abscindentem, omninò cadere intra rectas, æquales quadrantibus perimetrorum inscripti & circumscripti polygoni, circulo ab eodem diametri termino inscriptas: indubi-



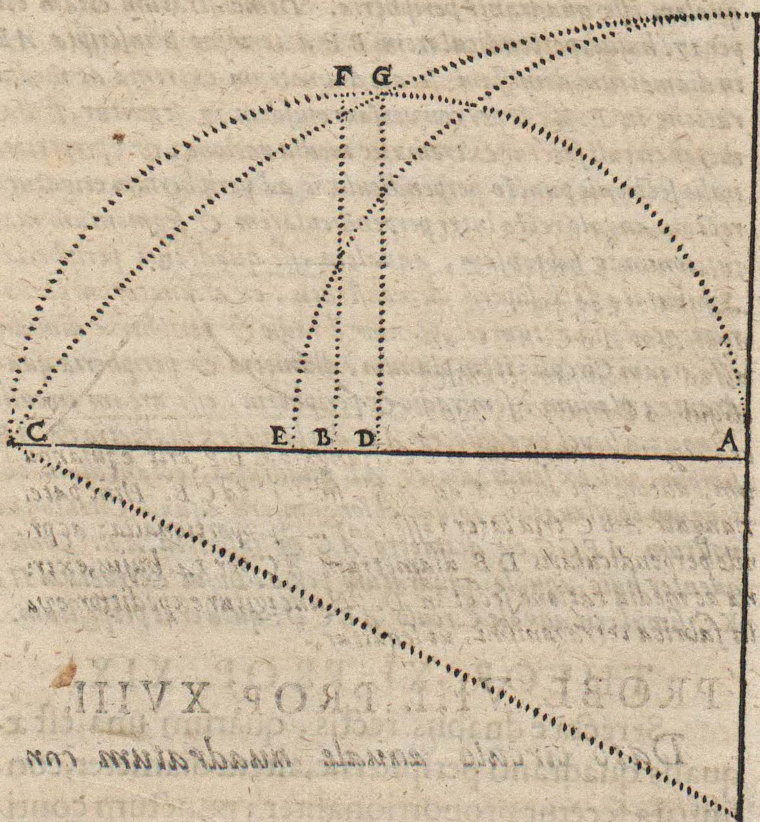
indubitatè per conſ. 16. p. hujus, ſequitur, ipſam A B exactè æqualem eſſe quadranti peripheriæ. Demonſtratum etiam eſt per 17. hujus, perpendicularem B E à termino B inſcriptæ A B in diametrum demiſſam, ſecare diametrum extrema ac media ratione in E. Unde per converſam ejuſdem 17. ſequitur, ſi diameter circuli ſecetur extrema ac media ratione, & è proportionalis ſectionis puncto perpendicularis ad peripheriam erigatur; rectam, angulo recto inter perpendicularem & ſegmentum majus contento ſubtenſam, æqualem eſſe quadranti peripheriæ. Quibus ita ſatis ſuperq; demonſtratis, ex ordinatorum planorum geodæſia notum eſt, planum è radio & peripheriæ dimidio eſſe aream Circuli; item planum è diametro & peripheriæ quadrante, planum è ſemiradio & peripheria, eſſe aream circuli. Quocirca ſi vel ex radio & A B dupla, vel ex diametro & A B ſimpla, vel ex ſemiradio & A B quadrupla, rectangulum oblongum conſtruatur, ipſum oblongum erit æquale Circulo; ut noſtrum A F G C ex diametro A C & inſcriptâ A B. Conſequenter huic æquale, quadratum per 6. hujus extructum H I K C ſimul erit æquale Circulo A B C D: quod erat propoſitum.

THEOR. XI. PROP. XIX.

Si recta è duabus rectis, quarum una eſt æqualis quadranti peripheriæ, altera diameter, continuata ſecetur proportionaliter; punctum continuationis duarum datarum eſt medium exceſſus majoris ſegmenti ſupra continuatæ proportionaliter ſectæ dimidium.

Demonſtratione res non habet opus. Sint duæ rectæ A B, B C: A B quidem diametro, B C verò quadranti peripheriæ æqualis; continuatæ, ut efficiant unam rectam A C, cujus dimi-

 dium



dium AD. Secetur AC proportionaliter in E. Excessus itaq; majoris segmenti AE supra dimidium totius proportionaliter secta est DE, cujus medium B, punctum sc. continuationis duarum rectarum AB, BC, quod ad oculum patet. Hinc oritur cyclogonismus (liceat ita loqui) Quadrati.

PROBL.

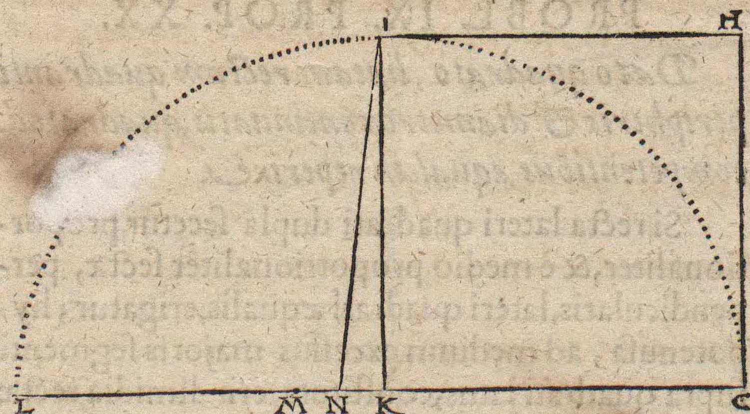
PROBL. IX. PROP. XX.

Dato quadrato, lineam rectam quadranti peripheriæ & diametro continuatis, quadratoq́ competentibus, æqualem reperire.

Si recta lateri quadrati dupla ſecetur proportionaliter, & è medio proportionaliter ſectæ, perpendicularis, lateri quadrati æqualis, erigatur; hypotenuſa, ad medium exceſſus majoris ſegmenti ſupra quadrati latus, conſtituta, erit dimidia rectæ quæſitæ.

Ad deſcribendum Circulum, dato quadrato æqualem, opus eſt inventione lineæ æqualis quadranti peripheriæ & diametro ſecundum rectam continuatis, qualis eſt in præced. prop. linea A C. Non enim duo quadrati latera æquantur duobus lateribus oblongi è diametro & quadrante peripheriæ conſtructi; propterea quod media proportionalis, latus ſc. quadrati ex illo oblongo conſtructi, per 7. I I I. Eucl. minor ſit dimidiâ ex diametro & quadrante peripheriæ compoſitâ: velut in præced. prop. B F minor eſt ipsâ G D, hoc eſt A D. Nempe duo quadrati latera minora ſunt ipsâ A C duplo tanto, quanto G D excedit latus quadrati B F. Igitur ante inquirendam Circuli diametrum defectus hic laterum quadrati reſtituendus eſt hoc peculiari problemate: Quadrati H I K C latera duo quæcunq; C K, K I, diſponantur ſecundum rectam lineam C L: è cujus medio K perpendicularis erigatur K I, æqualis lateri quadrati. Sectâ deinde lineâ C L proportionaliter in M, erit majus ſegmentum C M; exceſſus ſupra latus quadrati K M, cujus medium N: è quo ſubtendatur ad perpendicularis terminum I hypotenuſa N I; cujus dupla α β erit

 æqua-



æqualis diametro & quadranti peripheriæ continuatis quadratoq; competentibus, per conversam præced. hoc est, erit α β æqualis ipsi A C prop. præc. quod erat quæsitum.

α ——————————————— β

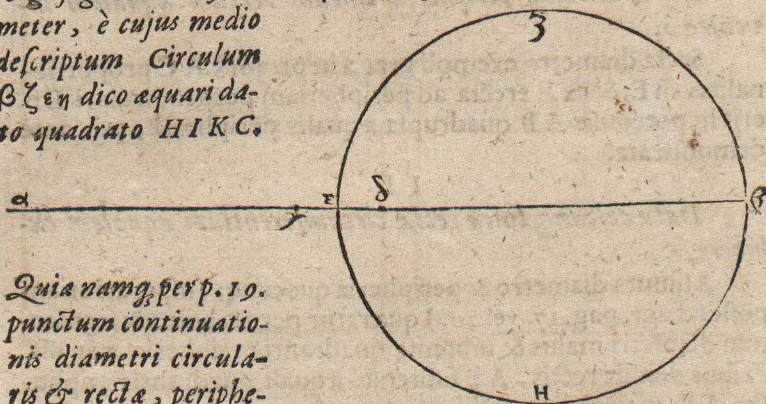
PROBL. X. PROPOS. XXI.

Dato quadrato æqualem Circulum describere.

Si quadranti peripheriæ & diametro continuatis inventa æqualis recta secetur proportionaliter; majus segmentum, minus dimidio excessu supra sectæ semissem, est diameter Circuli.

Esto quadratum prius H I K C, cui describendus æqualis Circulus. Inventa per prop. præced. linea α β, quadranti peripheriæ & diametro, secundum rectam continuatis, æqualis, secetur propor-

proportionaliter in γ. Medium autem totius αβ est δ. Excessus ergo segmenti majoris est δγ, cujus medium ε. Erit jam αε diameter, è cujus medio descriptum Circulum βζεη dico æquari dato quadrato HIKC.



Quia namq. per p. 19. punctum continuationis diametri circularis & rectæ, peripheriæ quadranti æqualis, est in medio excessu majoris segmenti supra continuatæ proportionaliter sectæ dimidium; erit, per conversam, segmentum majus, minùs dimidio excessu supra ejusdem sectæ dimidium, diameter Circuli. Vel: semisse istius continuatæ proportionaliter sectâ, majus segmentum, minus dimidio excessu supra sectæ dimidium, erit radius Circuli. Utraq. verò recta proportionaliter secanda inveniebatur problemate præcedente.

COROL-

COROLLARIA.

I.

Datæ cuicunq; peripheriæ lineam rectam æqualem invenire.

Secta diametro exempli gratia in prop.18. A C proportionaliter in E, & ex E erecta ad peripheriam perpendiculari E B, erit hypotenusæ A B quadrupla æqualis peripheriæ, per antè demonstrata.

II.

Datæ cuicunq; lineæ rectæ circumferentiam æqualem exhibere.

Assumta diametro & peripheria quacunq; (usurpari etiam posset diagr. pag. 17. vel 20.) quæratur per 18. hujus & segmentum diametri majus & subtensa quadranti peripheriæ æqualis. Tribus deinde rectis, A B subtensæ æquali quadranti peripheriæ, A E, majori diametri segmento, & quadranti datæ rectæ, quæratur per 7. hujus quarta proportionalis: ea erit segmentum diametri majus; quod ipsum proportionaliter sectum & majori suo segmento continuatum per cons. 7. hujus dabit integram æqualis peripheriæ describendæ diametrum.

Vel etiam, quoniam angulus ad A diametro & subtensa comprehensus in omnibus quadraturis semper est idem (propterea quod E B semper ex eodem diametri puncto excitatur) Data aliquâ rectâ, abscindatur à subtensa A B (continuata etiam si opus sit) portio æqualis quadranti rectæ datæ: & è puncto resectionis demittatur in diametrum (itidem si sit opus, productam) perpendicularis: eritq; abscissa portio diametri segmentum majus, ut prius, per 2. VI. *Eucl.*

FINIS.

Pag. 6. lin. 19. & 20. lege: ut secunda ad primam.



Oddział Konserwacji
Biblioteki Jagiellońskiej
marzec 1988 r.

